МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. (5) Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)}.$$

Контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

2. (5) Вычислить преобразование Фурье $F[f](y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\,dx$ функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ix + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. (5) Задан нетривиальный вектор $a \in \mathbb{R}^n$. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (a, \nabla_x)\, u(t,x) = e^{(a,x)+t}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

4. (5) Задана функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(inx)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что функция f непрерывно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}$, и вычислить интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx, \qquad \int\limits_0^{2\pi} |f'(x)|^2\, dx.$$

ОТВЕТЫ И ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРОВЕРКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. ⑤ Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)}.$$

Контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

Ответ: $\frac{\pi i}{3}$.

Инструкция: Интеграл выражен через вычет на бесконечности — 1 очко.

При $|z| > 4$ получено разложение

$$\sin\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \quad \text{— 2 очка}$$

При $|z| > 4$ получено разложение

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z-2}} = z - 2 + \frac{1}{6z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{— 2 очка}$$

2. ⑤ Вычислить преобразование Фурье $F[f](y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\,dx$ функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ix + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $F[f](y) = \frac{2\pi}{3}\begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ e^{2y}, & y < 0, \end{cases} \qquad F[f](0) = \lim\limits_{y\to 0} F[f](y) = \frac{2\pi}{3}$.

Инструкция: Преобразование Фурье $F[f](y)$ вычислено при $y > 0$ — 2 очка.

Преобразование Фурье $F[f](y)$ вычислено при $y < 0$ — 2 очка.

Доказано, что $F[f](y)$ непрерывно в нуле, и вычислено $F[f](0)$ — 1 очко.

3. ⑤ Задан нетривиальный вектор $a \in \mathbb{R}^n$. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (a, \nabla_x)\, u(t,x) = e^{(a,x)+t}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ответ: $u(t,x) = \frac{e^{(a,x)}}{1+|a|^2}\left(e^t - e^{-|a|^2 t}\right)$.

Инструкция: Найдено общее решение однородного уравнения: $v(t,x) = f(x - at)$ для любой функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ — 2 очка.

Найдено частное решение неоднородного уравнения: $w(t,x) = \frac{e^{(a,x)+t}}{1+|a|^2}$ — 2 очка.

Найдено решение задачи Коши $u = v + w$ для $f(x) = -\frac{e^{(a,x)}}{1+|a|^2}$ — 1 очко.

4. ⑤ Задана функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(inx)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что функция f непрерывно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}$, и вычислить интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx, \qquad \int\limits_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{8\pi}{3}, \quad \int\limits_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx = \frac{40\pi}{27}.$

Инструкция: Доказана непрерывная дифференцируемость f — 1 очко.

Для вычисления интегралов применено равенство Парсеваля:

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{4^n} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi n^2}{4^n} \quad \text{—1 очко.}$$

Вычислена сумма ряда для первого интеграла — 1 очко.

Вычислена сумма ряда для второго интеграла — 2 очка:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} = \frac{1}{\ln^2 4} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{tn}} \Bigg|_{t=1} = \frac{1}{\ln^2 4} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-4^{-t}} \Bigg|_{t=1} =$$

$$= \frac{4^{-t}}{(1-4^{-t})^2} + \frac{2 \cdot 4^{-2t}}{(1-4^{-t})^3} \Bigg|_{t=1} = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}.$$

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–4	НЕУД. (2)
5–6	УДОВЛ. (3)
7–8	УДОВЛ. (4)
9–10	ХОР. (5)
11–12	ХОР. (6)
13–14	ХОР. (7)
15–16	ОТЛ. (8)
17–18	ОТЛ. (9)
19–20	ОТЛ. (10)